Holomorphic Evolution Operatorについて (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究)

AUTHOR(S):

増田, 久弥

CITATION:

増田, 久弥. Holomorphic Evolution Operatorについて (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究). 数理解析研究所講究録 1971, 121: 58-68

ISSUE DATE:

1971-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/106484

数理解析研究所講究録
121 巻 1971 年 58-68

Holomorphic Evolution Operator について

東大(理) 増田久弥

§1. はしがき

この話の目的は、holomorphic evolution operator(以下 H. E. O. と略記)に関する Kato-Tanabe の結果:

(1) Osaka Math. Journal, vol 14, 107-133

(2) Osaka Journal of Math., vol 4, 1-4

の逆を示すことです。最近、私は、拡散方程式

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u$$

$$(x \in R^m,\ t > 0)$$

を、例えば、連続函数空間

$$C_0 \equiv \{u \mid u(x) \text{ は一様連続且 } |u(x)| \to 0 \ (|x| \to \infty)\}$$

(位相は、maximum norm)

の中で積分する事に興味をもちました。ここで係数は、

次の条件をみたすとします.

(4) 係数は実数値

(5) $a_{jk}(x)$は,一様連続で,一様有界

$$\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2 \quad (\delta>0,\ x,\xi\in R^n)$$

(6) $a_j(x)$, $a(x)$は,連続で,一様有界

$$a(x) \leq 0.$$

さて,この時

$$\mathfrak{D}(A_p)=\{u\,|\,u\in C_0,\ u\in W^{2,p}_{loc}(R^n),\ \mathcal{A}u\in C_0\}$$

$$A_p u = \mathcal{A}u$$

$\left(\mathcal{A}u=\sum a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+au\right.$ なる

形式的な作用素)

と,C_0の中の作用素を定めますと,

<u>命題1</u> $p>n$に対して,

(i) A_pは,pに独立なC_0の中の閉作用素

(ii) $A(=A_p)$は解析的半群T_tを生成し,T_tは

$\mathrm{Re}\,t>0$なる複素半平面全体に,tに関し解析的に

延長されえる。

係数が,tによる場合はどうでしょうか? 係数が,各

tに対して,上の(4)−(6)をみたす外に,tに関し

（xについては一様に）Hölder 連続　と仮定すれば，

命題2　各 t に対して，A と同様にして，$A(t)$ を定めるならば，（$A(t)$ は形式的に，

$$A(t)u = \sum a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x,t)u$$

で与えられる）$A(t)$ は C_0 で evolution operator $U(t,s)$ を生成する

(7) $U(t,r) = U(t,s)\,U(s,r) \quad (s<r<t)$

(8) $U(t,t) = I$ (identity operator)

(9) $U(t,s)$ は，$0 \leqq s \leqq t$ につき強連続．

(10) $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)\,U(t,s) \quad (0<s<t)$

(11) $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x$
$(x \in D(A(s)))$.

ここで，$D(A(t))$ は，t につき変化することに注意する必要があります。上の係数に関する条件よりも，もっと弱く t につき（xにつき一様に）連続のみで上の命題2がでるか，私にはわかりませんでした。t につき解析的ならばどうでしょうか？　(1)及び(2)の結果を適用して

$U(t, s)$ は実軸の近傍で, t と s ($|\arg(t-s)| < \text{const.}$) につき, 正則である —— ことが示されます。そのような $U(t, s)$ を H.E.O. と名づけます。

§2. 結果

__定理 1.__ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Δ を $(0, T)$ の複素凸近傍. X を複素 Banach 空間. $S_\delta = \{(s, t) \mid s, t \in \Delta,\ |\arg(t-s)| < \delta\}$.
$\{U(t, s)\}$ を, $(s, t) \in S_\theta$ で定義された X の中の有界作用素の族で次の条件をみたすとする。

(1-1) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$
$U(t, t) = I$
$((r, s), (s, t) \in S_\theta)$

(1-2) 任意の ε に対して,
$U(t, s)$ は $S_{\theta-\varepsilon}$ の中一様有界で $S_{\theta-\varepsilon}$ の中で, $s = t$ で連続

(1-3) $U(t, s)$ は, $(s, t) \in S_\theta$ につき正則.

この時,

$$D(A(t)) = \{x \mid \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h, t) - I}{h} x = \text{有在} (\equiv y)\}$$

$$A(t)x = y \quad (\equiv \lim_{h\to 0} [U(t+h,t) - I]x/h)$$

と定めると，

(1-a) $A(t)$ は稠密に定義された閉作用素

任意のコンパクト集合 K （Δの中）と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，λ_0，M が存在して

(1-b)

$$\sum(\lambda_0; -\frac{\pi}{2}-\theta+\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\theta-\varepsilon) \; (\equiv \Sigma) \subset \rho(A(t))$$

（tは Kの ある近傍の中）

(1-c) $\|(z-A(t))^{-1}\| \leq M/|z| \quad (z \in \Sigma)$ $\quad t \in K$

(1-d) $(z-A(t))^{-1}$ は，各zを固定した時に，tにつき 正則 $(t \in K)$.

が成立する。

この逆は，H. Komatsu（東大理学部紀要，'61）にはじまり，Kato-Tanabe は，(1)(2) の中で，次の如く与えた。

<u>定理２</u>（Kato-Tanabe） $\{A(t)\}$ を，上の (1-a)～(1-d) をみたす X の中の作用素の族とする。この時 Ω_θ 上で定義されたXの中の有界作用素の族 $\{U(t,s)\}$ で，(1-1) (1-2) (1-3) 及び

$$(1\text{-}4)\quad \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = A(t)\, U(t,s) \qquad (s,t) \in \Omega_\theta$$

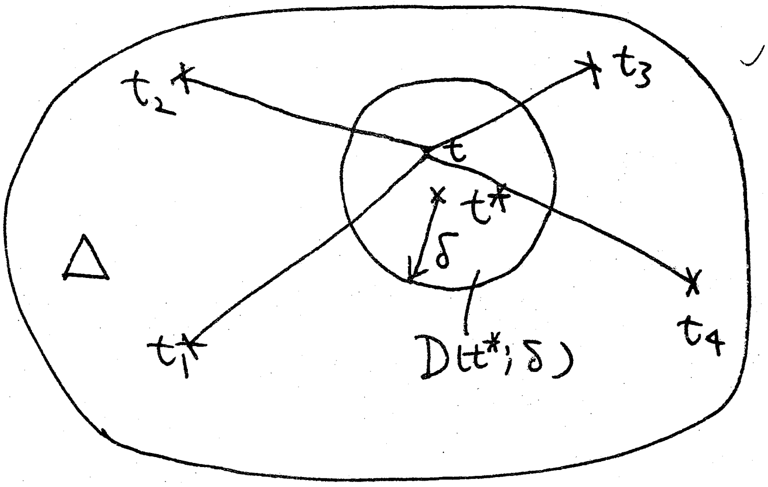
$$(1\text{-}5)\quad \frac{\partial}{\partial s} U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x \qquad (s,t) \in \Omega_\theta,\ x \in D(A(s))$$

をみたすものが存在する。

§3 定理1の証明

任意の $t^* \in \Delta$ を固定する。十分小さい $\eta > 0$ をとると、次の如き $\delta > 0$ と $t_1, \cdots, t_4 \in \Delta$ が存在する;

$$\theta - 2\eta < \arg(t - t_1) < \theta - \eta$$
$$\theta - 2\eta < \arg(t_3 - t) < \theta - \eta$$
$$-\theta + \eta < \arg(t - t_2) < -\theta + 2\eta$$
$$-\theta + \eta < \arg(t_4 - t) < -\theta + 2\eta$$
$$(\forall t \in D(t^*;\delta) \equiv \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - t^*| \le \delta \})$$



$$V(t, t_1; z) \equiv \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

（積分路は線分 $[t_1, t]$）

と定めると，これは次の性質をもつ。

(i) $V(t, t_1; z)$ は $t \in D(t^*; \delta)$ につき正則

(ii) $\| V(t, t_1; z) \| \leqq \text{Const.} / |z|$

$\left(t \in D(t^*; \frac{\delta}{2}),\ -\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta\right)$

(iii) $\| V_t(t, t_1; z) \| \leqq \text{Const.} / |z|$

（(ii) と同じ t，z に対して）

(iv) $\lambda V(t, t_1; \lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} I$ (strongly)

（λ は実数）

(v) 任意の $x \in X$ に対して，$V(t, t_1; z)x \in D(A(t))$

(vi) $(z - A(t)) V(t, t_1; z) = I - V_t(t, t_1; z)$.

以下，順次証明する。

$J_\varepsilon \equiv \int_{t_1}^{t-\varepsilon} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$ は (1-3) によって正則。$\varepsilon \downarrow 0$ の時，この積分は，t につき一様に，(1-2) より，

$$J \equiv \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

に収束する。よって J は正則である。

$$\|V(t,t_1;z)\| \leqq \int_{t_1}^{t} e^{-\mathrm{Re}[z(t-s)]} \|U(t,s)\| ds$$
$$\leqq \text{Const.}/|z|\cos(\theta'+\theta'')$$

$(\theta' = \arg z.\quad \theta'' = \arg(t-t_1)\ )$

よって、(iii) を得る。 $V(t,t_1;z)$ は正則よって

$$V(t,t_1;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t^*-\zeta|=\delta} \frac{V(\zeta,t_1;z)}{\zeta-t} d\zeta$$

とかかれる。よって、

$$V_t(t,t_1;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t^*-\zeta|=\delta} \frac{V(\zeta,t_1;z)}{(\zeta-t)^2} d\zeta$$

であるから、

$$\|V_t(t,t_1;z)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|t^*-\zeta|=\delta} \frac{\|V(\zeta,t_1;z)\|}{(\zeta-t)^2} d\zeta$$
$$\leqq \text{const.}\ \|V(\zeta,t_1;z)\|$$
$$\leqq \text{const.}/|z| \qquad [\text{(iii) より}]$$

を得る。 (iv) を示す。

$$\lambda V(t,t_1;z) = \lambda\int_{t_1}^{t} e^{-\lambda(t-s)} U(t,s) ds$$
$$= \int_0^{\lambda(t-t_1)} e^{-s}\, U(t, t-\frac{s}{\lambda}) ds$$
$$\xrightarrow[(\text{強})]{} \int_0^{\infty} e^{-s} ds\ U(t,t)$$

$$= I \qquad (\lambda \to \infty)$$

ここで，仮定 (1-1)(1-2) を用いた。容易な計算より

$$V(t+h, t_1; z) - V(t, t_1; z)$$

$$= \int_{t_1}^{t+h} e^{-z(t+h-s)} U(t+h, s)\, ds$$

$$- \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

$$= \int_{t}^{t+h} e^{-z(t+h-s)} U(t+h, s)\, ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t} [e^{-z(t+h-s)} - e^{-z(t-s)}] U(t+h, s)\, ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} [U(t+h, s) - U(t, s)]\, ds$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3.$$

左辺は，(c) によって正則より，両辺を h で割り $h \downarrow 0$ とすることによって，

$$\text{左辺} \xrightarrow[(\text{強})]{} V_t(t, t_1; z) \qquad (h \downarrow 0)$$

容易に，

$$\frac{1}{h} J_1 \to I \qquad (h \downarrow 0)$$

$$\frac{1}{h} J_2 \to -z \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

$$= -z\, V(t, t_1; z)$$

ところで，仮定 (I-1) によって

$$J_3 = [U(t+h, t) - I]\; V(t, t_1; z)$$

を得る．故に

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,t) - I}{h} V(t, t_1; z) = \text{存在}$$

且

$$V_t(t, t_1; z) = I - zV(t, t_1; z) + A(t)V(t, t_1; z)$$

をみたす。これは (v), (vi) の成立を示す。

同様に，

$$W(t_3, t; z) \equiv \int_t^{t_3} e^{-z(s-t)}\, U(s, t)\, ds$$

と定義すると，この W は，(i) (ii) — (v) の外に，

(vi)' 任意の $x \in D(A(t))$ に対して，

$$W(t_3, t; z)(z - A(t))x = x + W_t(t_3, t; z)x$$

をみたす。

さて，λ_0 を十分大きくとって，

$$\| V_t(t, t_1; z) \| < \frac{1}{2}$$

$$\| W_t(t_3, t_1; z) \| < \frac{1}{2}$$

が，$|z| \geq \lambda_0$ に対し成立するとする。((viii) による)。

次に、

$$B(t,t_1;z) = V(t,t_1;z)\,(I - V_t(t,t_1;z))^{-1}$$

とおくと、(i) — (iv) によって

(12) $B(t,t_1;z)$ は、$t \in D(t^*,\frac{\delta}{2})$ に対し正則.

(13) $\|B(t,t_1;z)\| \leq 2\,\|V(t,t_1;z)\|$

$$\leq \text{Const.}/|z|$$

$$\left(z \in \Sigma\left(\lambda_0; -\frac{\pi}{2}-\theta+3\eta, \frac{\pi}{2}-\theta-3\eta\right)\right)$$

(14) $(z - A(t))\,B(t,t_1;z) = I$

(iv) と (v) によって $D(A(t))$ は X の中稠密且

又 (vii) を考慮すれば、$B(t,t_1;z) = (z-A(t))^{-1}$ 且

(イ) $\Sigma\left(\lambda_0; -\frac{\pi}{2}-\theta+3\eta, \frac{\pi}{2}-\theta-3\eta\right) \subset \rho(A(t))$

(ロ) $\|(z-A(t))^{-1}\| \leq \text{Const.}/|z|$

$$\left(z \in \Sigma\left(\lambda_0; -\frac{\pi}{2}-\theta+3\eta, \frac{\pi}{2}-\theta-3\eta\right)\right)$$

(ハ) $(z-A(t))^{-1}$ は、$t \in D(t^*,\frac{\delta}{2})$ で t につき正則

が示される。同様に、t_1, t_3 の代りに、t_2, t_4 を用い、t^* が Δ の任意の元、η は任意に小さい数、コンパクト集合 K $(\subset \Delta)$ は $D(t_j^*, \delta_j)$ の有限個でおおわれる事を考慮すれば、求めるべき結論をえる。

(終り)